

理系のための東大文系数学
東京大学前期 1995 年 文系数学 第 4 問

半径 1cm の半球形の器が水平から角 θ だけ傾けて固定されている。ただし $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。この器に毎秒 $\frac{\pi}{18} \text{ cm}^3$ の割合で水を入れるとき、入れはじめてから $3 + \cos^2\theta$ 秒後に器から水が流れ出した。このときの θ の値を求めよ。

<略解>

水が流れ出した瞬間の容器内の水の体積は、半径 1 の球を、中心からの距離が $\sin \theta$ である平面で切ったときの、球の中心を含まない方の立体の体積に等しい。

半径 1 の球を単位円の回転体と考えれば、水の体積は、

$$\int_{\sin \theta}^1 \pi (\sqrt{1-x^2})^2 dx = \frac{\pi}{3} (\sin^3 \theta - 3 \sin \theta + 2)$$

これが $\frac{\pi}{18} (3 + \cos^2 \theta) = \frac{\pi}{18} (4 - \sin^2 \theta)$ に等しいから、

$$\frac{\pi}{3} (\sin^3 \theta - 3 \sin \theta + 2) = \frac{\pi}{18} (4 - \sin^2 \theta)$$

$$\Leftrightarrow (2 \sin \theta - 1)(\sin \theta + 2)(3 \sin \theta - 4) = 0$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$$

..... (答)